

# Grundlagen der Optik

# Basic Principles of Optics

## Abbildungs-Nomenklatur

Zur Definition von Bezeichnungen und Größen bei Einzellinsen wird die nebenstehende Zeichnung verwendet.

Die optische Achse (OO') der Linse entspricht der Linie, welche die Krümmungsmittelpunkte der beiden sphärischen Linsenoberflächen schneidet. Die Krümmungsmittelpunkte sind hier nicht eingezeichnet.

Strahl A verläuft vor der Linse parallel zur optischen Achse und wird in  $F_2$  gebrochen.  $F_2$  wird als hinterer, sekundärer oder Bild-Brennpunkt bezeichnet.

Strahl B verläuft ebenfalls parallel zur optischen Achse jedoch in anderer Richtung. Er wird in dem Punkt  $F_1$  gebrochen, dem so genannten vorderen, primären oder Objekt-Brennpunkt.

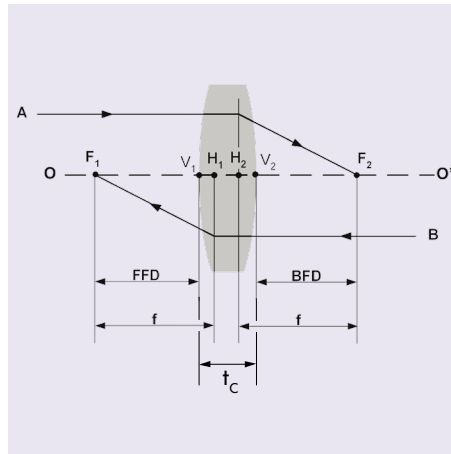
Bei „gut korrigierten“ Linsen werden alle parallel zur optischen Achse verlaufenden Strahlen in einem Brennpunkt fokussiert.

Linsen, deren Dicke nicht vernachlässigt werden darf, können als optisches System angesehen werden, welches sich aus mehreren Linsen zusammensetzt. Die Brennpunkte  $F_1$  und  $F_2$  werden von den äußeren Scheitelpunkten  $V_1$  und  $V_2$  aus gemessen – deren Abstände FFD/BFD vordere bzw. hintere Brennweite genannt.

Die Schnittpunkte der verlängerten einfallenden und austretenden Strahlen ergeben eine gekrümmte Fläche. Im achsennahen Gebiet lässt sich diese Fläche durch eine Ebene nähern, die Hauptebene genannt wird. Als vorderer  $H_1$  bzw. hinterer  $H_2$  Hauptpunkt werden die Punkte bezeichnet, an denen die Hauptebene die optische Achse schneidet. Von den Hauptpunkten aus ergeben sich die effektiven Brennweiten  $f$  als Abstand zwischen  $F_1$  und  $H_1$  bzw.  $F_2$  und  $H_2$ .

Der Abstand der Hauptebenen liegt für gewöhnliche Glaslinsen bei etwa einem Drittel der Linsendicke  $V_1V_2 = t_c$ .

## Diagram Nomenclature



The adjoining drawing is used to define terms and quantities of singlet lenses.

The optical axis (OO') of the lens is the line passing through the centers of curvature of the two spherical lens surfaces. The centers of curvature are not shown in the diagram.

Ray A runs parallel to the optical axis and is refracted to point  $F_2$ .  $F_2$  is called the back, secondary, or image focal point.

Ray B also runs parallel to the optical axis but in the opposite direction. It is refracted to point  $F_1$ , the so-called front, primary, or object focal point.

“Well corrected” lenses focus all rays parallel to the optical axis to a single focal point.

Lenses in which the thickness cannot be neglected can be viewed as optical systems consisting of multiple lenses. The focal points  $F_1$  and  $F_2$  are measured from the vertices  $V_1$  and  $V_2$ . The distances FFD and BFD are called front and back focal distance, respectively.

The intersecting points of the extended progenitor and refracted rays form a sphere. For the area close to the optical axis this sphere can be approximated by a plane, which is known as principal surface. The intersections  $H_1$  and  $H_2$  of the principal surface with the optical axis are called the front and back principal point, respectively. The distances from the principal points to their respective focal points ( $H_1F_1$  and  $H_2F_2$ ) are represented by  $f$ , the effective focal length.

For common glass lenses the distance between the principal planes is approximately one third of the lens thickness  $V_1V_2 = t_c$ .



## Vorzeichenkonventionen

Um die beschriebenen Größen zu berechnen, werden Vorzeichenkonventionen benötigt, die wie folgt lauten:

- Abstände nehmen nach rechts hin zu.
- Eine Oberfläche hat eine positive Krümmung, wenn ihr Krümmungsmittelpunkt rechts von ihrem Scheitelpunkt liegt.
- Winkel vergrößern sich gegen den Uhrzeigersinn von Null (d. h. parallel zur optischen Achse) auf positive Werte.
- $V_1H_1$  und  $H_2V_2$  sind positiv, wenn die Hauptpunkte jeweils rechts bzw. links von ihren dazugehörigen Scheitelpunkten liegen. Hauptpunkte können außerhalb der Linse liegen.

## Formelsammlung zur Linsenberechnung

Zur Berechnung der verschiedenen Spezifikationen dienen folgende Formeln. Dabei bezeichnet  $R_1$  den eingangsseitigen Krümmungsradius,  $R_2$  den ausgangsseitigen Krümmungsradius der Linse.

### Allgemeine Formeln für Linsen in Luft-Umgebung General Formulas for Lenses Immersed in Air

Symbol	Description	Formula
$f$	Effektive Brennweite Effective focal length	$\frac{1}{f} = (n-1) \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] + \frac{t_c (n-1)^2}{nR_1R_2}$
BFD	Hintere Brennweite Back focal length	$\text{BFD} = f \left[ 1 - \frac{t_c (n-1)}{nR_1} \right]$
FFD	Vordere Brennweite Front focal distance	$\text{FFD} = f \left[ 1 + \frac{t_c (n-1)}{nR_2} \right]$
$H_2V_2$ $V_1H_1$	Abstand Hauptpunkt - Scheitelpunkt Distance principal point - vertex	$H_2V_2 = f - \text{BFD} = f \frac{t_c (n-1)}{nR_1}$ $V_1H_1 = f - \text{FFD} = -f \frac{t_c (n-1)}{nR_2}$

## Sign Conventions

To calculate the described dimensions we need the following sign conventions:





- Distance increases towards the right.
- A surface has positive curvature if its center of curvature is to the right of the vertex of the surface.
- Angles increase from zero, parallel to the optical axis, to positive values in a counter-clockwise direction from the optical axis.
- $V_1H_1$  and  $H_2V_2$  are positive if the principal points are to the right and left, respectively, of their corresponding vertices. Note that the principal points can fall outside of the lens.

## Collection of Formulas for Lens Calculation

The following formulas are used to calculate the different specifications.  $R_1$  denotes the radius of curvature of the incident side,  $R_2$  the radius of curvature of the output side.



**Spezialfälle der Brennweiten von dünnen Linsen in Luft-Umgebung**  
**Selected Cases of the Focal Distances for Thin Lenses Immersed in Air**

Type	Description	Formula
Plankonvex Plano-convex		$f = \frac{R}{(n-1)}$
Plankonkav Plano-concave		$f = -\frac{R}{(n-1)}$
Bikonvex Biconvex		$f = \left[ \frac{2(n-1)}{R} - \frac{t_c(n-1)^2}{nR^2} \right]^{-1}$
Bikonkav Biconcave		$f = -\left[ \frac{2(n-1)}{R} + \frac{t_c(n-1)^2}{nR^2} \right]^{-1}$

In der Übersicht zu Einzellinsen in unserem [Laseroptik-Katalog](#) sind die Brennweiten für die wichtigsten Wellenlängen angegeben. Weiterhin sind die genauen Krümmungsradien und Angaben zur Mittendicke zu finden. Mit den gelisteten Formeln können Sie weitere Brennweiten berechnen. Angaben zu den Brechungsindizes der einzelnen Substrate finden Sie ab Seite 28 in den Brechungsindextabellen.

In the singlet overview of our laser [optics catalog](#), you will find focal length values for the most important wavelengths. The exact radii of curvature and center thickness values are also stated. You can use the listed formulas to calculate additional focal lengths. Specifications regarding the refraction indices of the different substrates can be found from page 28 on in the refraction index tables.

## Bestimmung der sphärischen Aberration

Hochwertige Einzellinsen sind für das Fokussieren von Lasern und für Anwendungen zur Strahlführung von besonderem Interesse. Sie sind kostengünstig, besitzen eine hohe Zerstörschwelle und sind als Standardbauteile in großer Vielfalt verfügbar.

LASER COMPONENTS bietet eine umfassenden Auswahl an BK7 und „UV grade“ Quarz Einzellinsen an, welche den meisten Ansprüchen beim Einsatz von monochromatischem Licht genügen.

Sphärische Flächen liefern lediglich im Gaußschen Gebiet ideale Abbildungen. Es sollte daher per Simulation untersucht werden, wie hoch die Abweichungen außerhalb des Gebietes sind, um die Einsatzmöglichkeiten zu bestimmen.

## Determination of the Spherical Aberration

High quality singlet lenses are of particular interest in laser focusing and beam handling applications because of their low cost, high damage threshold, and availability of a large variety of standard parts.

LASER COMPONENTS offers a large selection of BK7 and UV grade quartz singlets that can satisfy most monochromatic application requirements.

Only in the Gaussian area do spherical surfaces deliver ideal images. It is therefore recommendable to simulate how high the deviations outside the area are in order to determine possible applications.

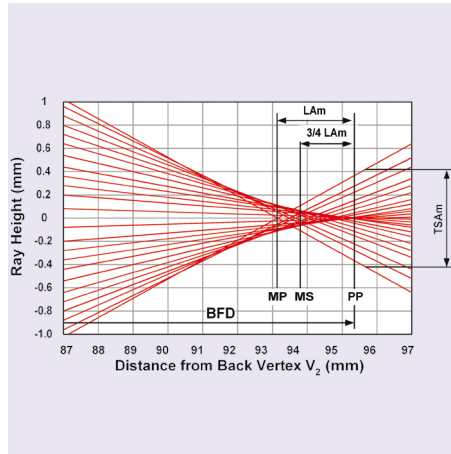


## Simulation

Die Simulation stellt eine geometrische Strahlenverfolgung von 25 Strahlen in der Brennebene einer plankonvexen BK7 Linse mit einer Brennweite von 100 mm dar ( $n = 1.515$ ).

Ein kollimierter Laserstrahl trifft auf die konvexe Seite der Linse und tritt über die plane Seite aus. Die simulierten Strahlen werden parallel zur optischen Achse in gleichen Abständen über einen Bereich von 16 mm ober- und unterhalb der Achse verteilt.

Der Ursprung des abgebildeten Graphen (0 mm) fällt mit dem hinteren Scheitelpunkt  $V_2$  der Linse zusammen. Auf der x-Achse wird damit die hintere Brennweite **BFD** dargestellt.



## Simulation

This simulation is a geometrical ray trace of 25 rays in the focal region of a 100 mm focal length BK7 plano-convex lens ( $n = 1.515$ ).

A collimated laser beam enters the convex side of the lens and exits on the plane side. The simulated rays are launched parallel to the optical axis and are equally spaced in a region 16 mm above and below the axis.

The origin of the graph (0 mm) is at the back vertex ( $V_2$ ) of the lens. The x-axis hence shows the back focal distance (**BFD**).

## Simulationsergebnis

- Die achsenfernen Strahlen schneiden die optische Achse in der Ebene MP während die paraxialen in der Fokusebene PP auftreffen.
- Der Abstand von  $V_2$ PP entspricht dem hinteren Fokusabstand (**BFD**) der Linse.
- Der Abstand PPMP (hier negativ) wird als longitudinale sphärische Aberration **LAm** der achsenfernen Strahlen bezeichnet.
- Die Strahlbreite in der paraxialen Fokusebene PP ist die transversale sphärische Aberration **TSAm**, welche durch die Höhe der achsenfernen Strahlen und damit durch den Eingangsstrahldurchmesser bestimmt wird.

Beachten Sie, dass sich die kleinste geometrische Spotgröße in der Ebene **MS** befindet. Diese liegt, bezogen auf die Strecke MPPP, etwa 3/4 vor der PP-Ebene.

## Simulation Result

- The marginal rays intersect the optical axis in plane MP while the paraxial rays reach the axis at focal plane PP.
- The distance  $V_2$ PP is the back focal distance (**BFD**) of the lens.
- The distance PPMP, here negative, is the longitudinal spherical aberration **LAm** of the marginal rays.
- The beam width in the paraxial focal plane PP is the transverse spherical aberration **TSAm**, determined by the height of the marginal rays (and hence by the diameter of the incident beam).

Notice that the smallest geometrical spot size can be found at plane **MS**, approximately 3/4 LAm back toward the lens from the paraxial focal plane PP.

## Formfaktor

Bei Einzellinsen kann der kleinste Strahldurchmesser  $d_{MS}$  in der Ebene MS mittels der Aberrationstheorie dritter Ordnung berechnet werden. Das Ergebnis hierzu lautet:

$$d_{MS} = f \Delta\theta_{blur}$$

wobei  $\Delta\theta_{blur}$  die „Vollwinkel-Winkelunschärfe“ der Linse für einen kollimierten Eingangsstrahl ist. Sie ist gegeben durch:

$$\Delta\theta_{blur} = (d_0/f)^3 [ n^2 - (2n+1)K + (n+2)K^2/n ] / 32(n-1)^2$$

mit  $d_0$ : Durchmesser des Eingangsstrahls  
 K: Formfaktor der Linse, gegeben durch:  
 $K = R_2 / (R_2 - R_1)$

Beachten Sie, dass die Orientierung der Linse in K enthalten ist.

## Shape Factor

For singlet lenses, the smallest beam diameter  $d_{MS}$  at plane MS can be computed from the third order aberration theory. The result is:

$$d_{MS} = f \Delta\theta_{blur}$$

where  $\Delta\theta_{blur}$  is the “full angle angular blur” of the lens for collimated input light, given by:

$$\Delta\theta_{blur} = (d_0/f)^3 [ n^2 - (2n+1)K + (n+2)K^2/n ] / 32(n-1)^2$$

where  $d_0$ : Input beam diameter  
 K: Shape factor of the lens given by:  
 $K = R_2 / (R_2 - R_1)$

Note that the lens orientation is contained in K.



## Winkelunschärfe

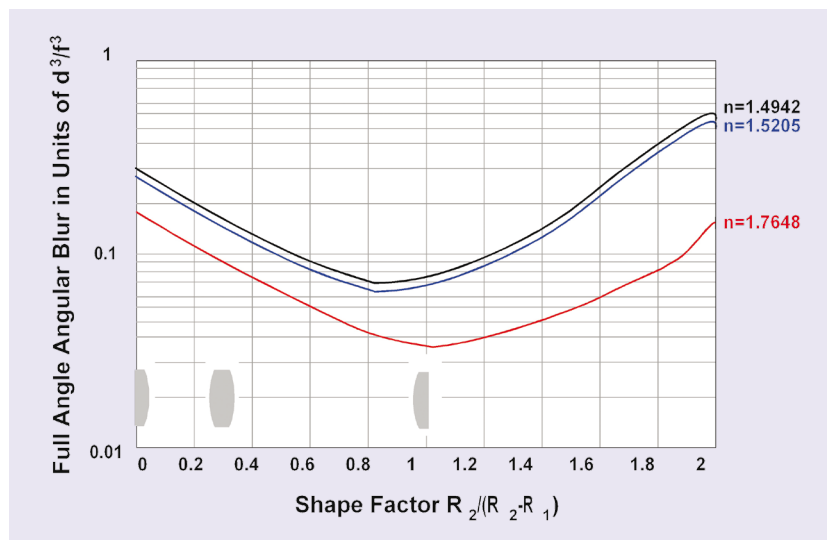
Dargestellt ist unter Bedingung der geometrischen Optik die Winkelunschärfe als Funktion des Formfaktors einer sphärischen Einzellinse für typische Brechungsindizes:

- Quarz ( $n = 1.4942$  bei  $280.0$  nm)
- BK7 ( $n = 1.5205$  bei  $514.5$  nm)
- SF11 ( $n = 1.7648$  bei  $800.0$  nm)

## Angular Blur

Assuming geometrical optics conditions, the graph depicts the angular blur as a function of the shape factor of a spherical singlet lens for typical refractive indices:

- Quartz ( $n = 1.4942$  at  $280.0$  nm)
- BK7 ( $n = 1.5205$  at  $514.5$  nm)
- SF11 ( $n = 1.7648$  at  $800.0$  nm)



### Bestimmung der Einflussnahme der sphärischen Aberration

Es wird angenommen, dass ein kollimierter Strahl auf die Linsenfläche mit dem Radius  $R_1$  trifft. Um das Diagramm benutzen zu können, berechnen Sie den Formfaktor  $K$  der Linse unter Anwendung der korrekten Vorzeichenkonventionen für  $R_1$  und  $R_2$ . Lesen Sie die Winkelunschärfe aus obigen Graphen ab, wobei  $d$  der Strahldurchmesser und  $f$  die Fokusslänge ist. Berechnen Sie nun die eigentliche Winkelunschärfe in Radianten durch Multiplikation mit  $(d_0/f)^3$ . Zum Schluss multiplizieren Sie mit der Brennweite, um die Spotgröße in Längeneinheiten zu erhalten. Liegt dieser Wert deutlich unter der Beugungsbegrenzung, wird die Performance der Linse durch Beugung und nicht durch sphärische Aberration limitiert sein.

### Determination of the Influence of the Spherical Aberration

A collimated beam is assumed incident on the lens surface with radius  $R_1$ . To use this graph, find the shape factor of the lens using the proper sign conventions for  $R_1$  and  $R_2$ . Read the angular blur, in units where  $d$  is the beam diameter and  $f$  is the focal length. Then calculate the actual angular blur in radians by multiplying by  $(d_0/f)^3$ . Finally, multiply by the focal length to obtain the spot size in units of length. If the value is much less than the diffraction limit, performance of the lens will be limited by diffraction rather than spherical aberration.

### Zu beachten:

- Der kollimierte Laserstrahl sollte zuerst auf die gekrümmten Fläche auftreffen. Eine verkehrt im Strahlengang ausgerichtete Plankonvexlinse vervierfacht die Unschärfe.
- Die Verwendung einer Best-Form-Linse rechtfertigt kaum ihren hohen Preis.
- Der hohe Index ( $n = 1.799$  bei  $515$  nm) von SF11 reduziert die Aberration einer Einzellinse deutlich.

### Important to Note:

- The collimated laser beam should first hit the curved surface. The error of misorienting a plano-convex lens approximately quadruples the blur.
- Use of a best form lens is hardly worth the expense.
- The high index of SF11 ( $n = 1.799$  at  $515$  nm) significantly reduces singlet aberration.



### Beispielhafte Berechnung

Bei  $K = 1$  soll die minimale Strahlgröße  $d_{MS} = 226 \mu\text{m}$  einer geometrischen Optik berechnet werden.

LAm ist gegeben durch:  $LAm = -4f \Delta\theta_{\text{blur}}/d_0$

Die minimale Spotgröße tritt in einer Entfernung von  $s_2 = BFD - 0.75 LAm$  vom hinteren Scheitelpunkt der Linse auf. In diesem Beispiel seien  $LAm = -2.82 \text{ mm}$  und  $s_2 = 93.92 \text{ mm}$ .

Ein Spot mit einem Durchmesser von  $226 \mu\text{m}$ , welcher durch Fokussieren eines kollimierten Strahls mit  $32 \text{ mm}$  Durchmesser erzielt wird, besitzt eine starke Aberration.

Die beugungsbegrenzte Vollwinkel-Winkelunschärfe mit einer Apertur, die durch den Strahldurchmesser  $d_0$  begrenzt ist, berechnet sich aus:

$$\Delta\theta_{\text{diff}} = 2.44 \lambda / d_0$$

Dies impliziert eine beugungsbegrenzte Spotgröße von:

$$d_{\text{diff}} = f \Delta\theta_{\text{diff}} = 2.44 \lambda f / d_0$$

$d_{\text{diff}}$  entspricht dem Durchmesser des ersten dunklen Rings des Airy-Musters in der Brennebene. Im obigen Beispiel beträgt  $d_{\text{diff}} = 4.8 \mu\text{m}$  bei einer Wellenlänge von  $632.8 \text{ nm}$ .

Die Beugungsbegrenzung ist eine Funktion von der Brennweite  $f$  und dem Strahldurchmesser. Die dargestellte Kurve errechnet sich für

$$f \Delta\theta_{\text{blur}} = f \Delta\theta_{\text{diff}}$$

Es gilt:

- $f \Delta\theta_{\text{blur}} > f \Delta\theta_{\text{diff}}$  Spotgröße durch Aberration limitiert
- $f \Delta\theta_{\text{blur}} < f \Delta\theta_{\text{diff}}$  Spotgröße ist beugungsbegrenzt

Die Kurven auf der folgenden Seite stellen diese Berechnung für korrekt orientierte plankonvexe Einzellinsen aus BK7 und Quarzglas dar.

### Beugungsbegrenzung

Zur Benutzung der Kurven suchen Sie zunächst den Schnittpunkt von Strahldurchmesser und gewünschter Fokusslänge im Diagramm. Liegt dieser Punkt überhalb der Kurve der gewünschten Wellenlänge, ist das Verhalten einer plankonvexen Einzellinse im Prinzip beugungsbegrenzt. Liegt der Punkt auf oder unterhalb der Kurve, ziehen Sie die Verwendung einer Doppellinse zur Verringerung der verzerrten Spotgröße in Betracht.

### Calculation Example

For  $K = 1$  we can compute the geometrical optics minimum beam size of  $d_{MS} = 226 \mu\text{m}$ .

LAm is given by:  $LAm = -4f \Delta\theta_{\text{blur}}/d_0$

The minimum spot size occurs at a distance of  $s_2 = BFD - 0.75 LAm$  from the rear vertex of the lens. In this example,  $LAm = -2.82 \text{ mm}$  and  $s_2 = 93.92 \text{ mm}$ .

A  $226 \mu\text{m}$  spot size obtained by focusing a  $32 \text{ mm}$  diameter collimated beam possesses a strong aberration.

The diffraction limited full angle angular blur with aperture limited by the beam diameter  $d_0$  is:

$$\Delta\theta_{\text{diff}} = 2.44 \lambda / d_0$$

Implying a diffraction limited spot size of:

$$d_{\text{diff}} = f \Delta\theta_{\text{diff}} = 2.44 \lambda f / d_0$$

$d_{\text{diff}}$  is the diameter of the first dark ring of the Airy pattern in the focal plane. For the above example,  $d_{\text{diff}} = 4.8 \mu\text{m}$  at a wavelength of  $632.8 \text{ nm}$ .

The diffraction limit is a function of focal distance  $f$  and the beam diameter. The depicted graph is computed by

$$f \Delta\theta_{\text{blur}} = f \Delta\theta_{\text{diff}}$$

where if:

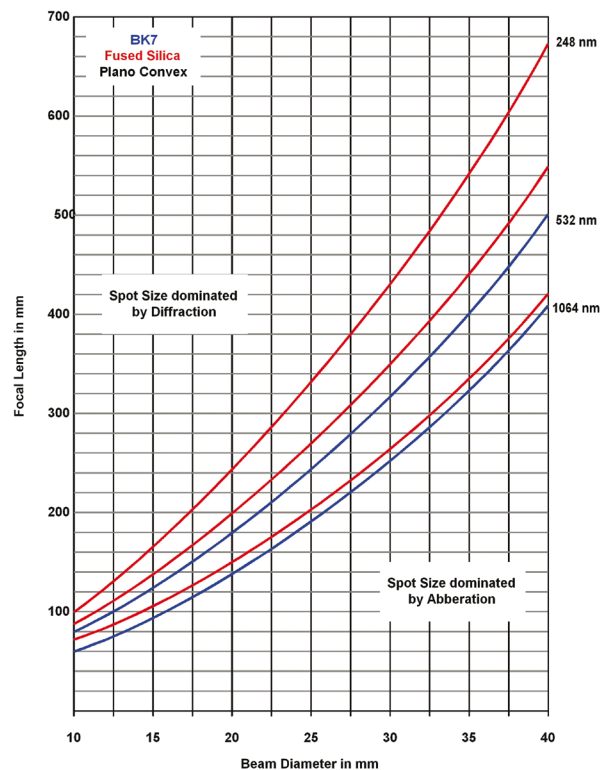
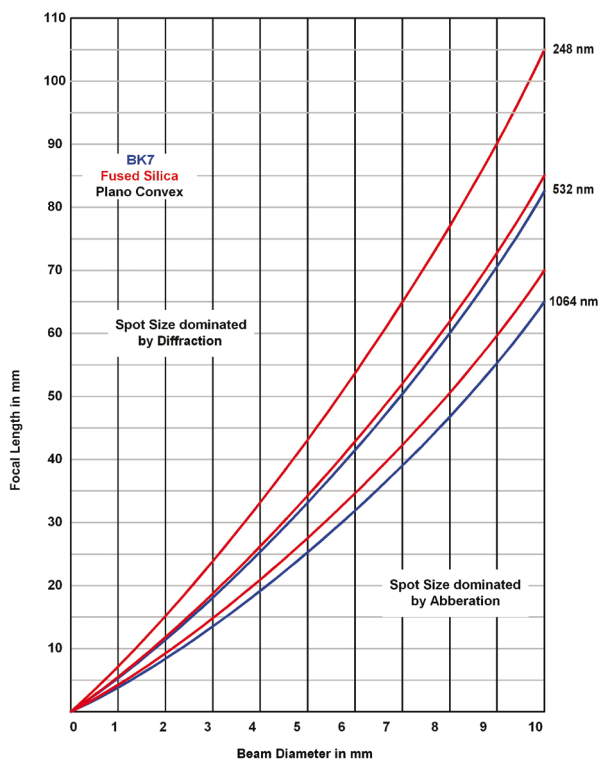
- $f \Delta\theta_{\text{blur}} > f \Delta\theta_{\text{diff}}$  the spot size is limited by aberration
- $f \Delta\theta_{\text{blur}} < f \Delta\theta_{\text{diff}}$  the spot size is essentially diffraction limited

The curves on the following page depict this computation for properly oriented plano-convex BK7 and quartz singlets.

### Diffraction Limit

To use the curves, find the beam diameter and desired focal length point on the graph. If this point is above the curve for the intended wavelength, plano-convex singlet lens performance is essentially diffraction limited. If this point is on or below the curve, consider using a doublet to decrease the aberrated spot size.





## Hinweise

Zum Entwurf von optischen Systemen mit geringer Divergenz des Laserstrahls ist die paraxiale Näherung geeignet, um die Elemente optimal zu positionieren. Aufgrund von Beugungerscheinungen können Berechnungen der Vergrößerung gänzlich abweichen, wurden sie basierend auf der geometrischen Optik berechnet.

Beachten Sie folgende Vorgehensweise:

- Verwenden Sie den bekannten ABCD Matrixformalismus.
- Behandeln Sie die Linsen wie dünne Linsen.
- Benutzen Sie die Entfernungen zwischen den Hauptpunkten, um die Position der Elemente zu bestimmen.
- Verwenden Sie in einer komplexeren Rechnung die tatsächlichen Krümmungsradien, Brechungsindizes und Mittendicken, so berücksichtigt Ihre Rechnung bereits die Hauptebenen.

## Note

In designing optical systems for low divergence laser beams, the paraxial approximation is excellent as far as the positioning of the elements is concerned. However, due to diffraction, the magnifications encountered may be completely different than those calculated from geometrical optics.

Note the following method:

- Use the familiar ABCD matrix formalism.
- Treat the lenses as thin lenses.
- Use the distances between the principal points to determine the element positioning.
- If you use the actual radii of curvature, refraction indices, and center thicknesses in a more detailed calculation, your calculation will already implicitly take into account the principal planes.

